CHUYÊN ĐỀ 2
PHƯƠNG PHÁP TAM GIÁC BẰNG NHAU

A. LÝ THUYẾT

1. Hai tam giác bằng nhau

Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tường ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A'B' \; ; \; AC = A'C' \; ; \; BC = B'C' \\ \widehat{A} = \widehat{A}' \; ; \; \widehat{B} = \widehat{B}' \; ; \; \widehat{C} = \widehat{C}' \end{cases}$$

2. Các trường hợp bằng nhau của tam giác

a) Trường hợp 1 : cạnh – cạnh – cạnh

Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

b) Trường hợp 2 : cạnh – góc – cạnh

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

c) Trường hợp 3 : góc – cạnh – góc

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

3. Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông

a) Trường hợp 1 : hai cạnh góc vuông (cạnh – góc - cạnh)

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

b) Trường hợp 2 : cạnh huyền – góc nhọn (góc – cạnh – góc)

Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

c) Trường hợp 3 : cạnh huyền – cạnh góc vuông (cạnh – cạnh – cạnh)

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

4. Ứng dụng

Chúng ta thường vận dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác để :

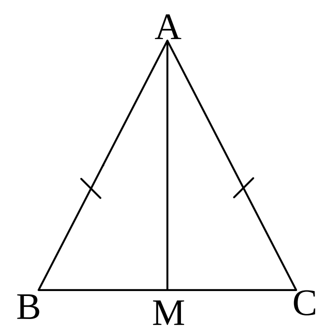
- ***Chứng minh*** : hai tam giác bằng nhau, hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau; hai đường thẳng vuông góc ; hai đường thẳng song song; ba điểm thẳng hàng ; …
- ***Tính*** : các độ dài đoạn thẳng ; tính số đo góc ; tính chu vi ; diện tích ; …
- ***So sánh*** : các độ dài đoạn thẳng ; so sánh các góc ; …

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) Nếu AB = AC thì $\widehat{B} = \widehat{C}$;

b) Nếu $\widehat{B} = \widehat{C}$ thì AB = AC.



Hình 1

Giải :

a) *(Hình 1)*

Cách 1. Gọi M là trung điểm của BC.

Xét ΔAMB và ΔAMC có :

AB = AC (gt) ; BM = CM (cách dựng) ; AM chung

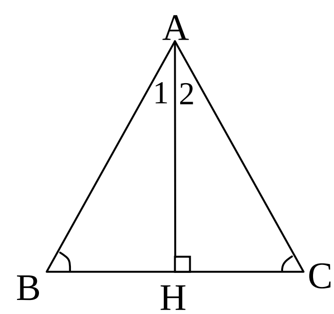
Do đó : ΔAMB = ΔAMC (c – c – c).

Suy ra : $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Cách 2. Xét ΔABC và ΔACB có :

AB = AC (gt) ; BC chung ; AC = AB (gt)

Do đó : ΔABC = ΔACB (c – c – c) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$.



Hình 2

b) *(Hình 2)*. Kẻ AH ⊥ BC (H ∈ BC). Tam giác AHB và AHC cùng vuông tại H nên :

$\begin{cases} \widehat{A}_1 + \widehat{B} = 90^0 \\ \widehat{A}_2 + \widehat{C} = 90^0 \end{cases}$, mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ (gt) nên suy ra : $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

Xét ΔAHB và ΔAHC có :

$\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^0$; AH chung ; $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (chứng minh trên)

Do đó : ΔAHB = ΔAHC (g – c - g) $\Rightarrow$ AB = AC (đpcm).

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có AB = AC. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho MB = MC ; N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng :

a) AM là tia phân giác của góc BAC ;

b) Ba điểm A, M, N thẳng hàng ;

c) MN là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

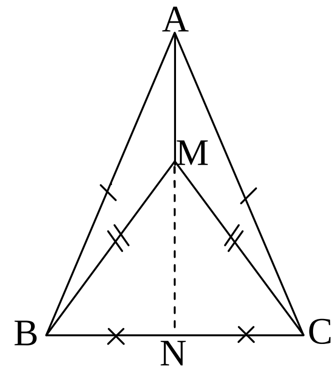
Giải : (*Hình 3*)

a) Xét ΔAMB và ΔAMC có :

AB = AC (gt) ; AM chung ; MB = MC (gt)

Do đó : ΔAMB = ΔAMC (c – c – c) $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$.

Vậy AM là phân giác của góc BAC (đpcm).



Hình 3

b) Xét ΔANB và ΔANC có :

AB = AC (gt) ; AN chung ; NB = NC (gt)

Do đó : ΔANB = ΔANC (c – c – c) $\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{CAN}$.

Hay AN là phân giác của góc BAC (đpcm).

Vì AM, AN đều là phân giác của góc BAC nên hai tia AM và AN trùng nhau.

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

c) Theo câu b) thì ΔANB = ΔANC (c – c – c) $\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{ANC}$.

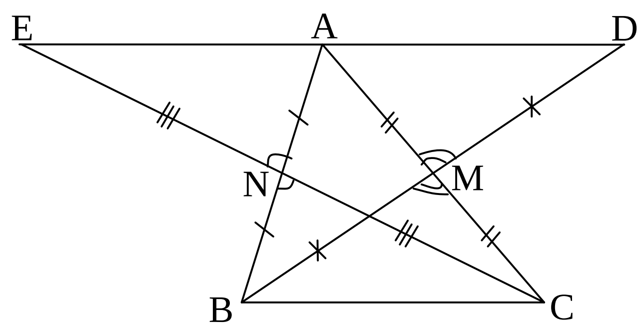
Mà $\widehat{ANB} + \widehat{ANC} = \widehat{BNC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{ANC} = 90^0 \Rightarrow AN \perp BC$ hay $MN \perp BC$.

Mặt khác NB = NC (gt) nên MN là đường trung trực của BC.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB. Trên tia đối của tia MB và MC lấy tương ứng hai điểm D và E sao cho MB = MD và NC = NE. Chứng minh rằng :

a) AD = AE ;

b) Ba điểm A, E, D thẳng hàng.



Hình 4

Giải : (hình 4)

a) Xét ΔMAD và ΔMCB có :

MB = MD (gt)

$\widehat{AMD} = \widehat{CMB}$ (hai góc đối đỉnh)

MA = MC (gt)

Do đó ΔMAD = ΔMCB (c – g – c), suy ra AD = BC (1)

Chứng minh tương tự ta cũng có AE = BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra AD = AE.

b) Vì ΔMAD = ΔMCB (chứng minh trên) nên $\widehat{MAD} = \widehat{MCB}$.

Hai góc này ở vị trí so le trong nên AD // BC.

Chứng minh tương tự ta cũng có AE // BC.

Qua điểm A có hai đường thẳng AD và AE cùng song song với BC. Theo tiên đề Ơcơlit thì hai đường thẳng này trùng nhau. Hay ba điểm A, E, D thẳng hàng.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại B và AC = 2AB. Kẻ phân giác AE (E $\in$ BC).

a) Chứng minh EA = EC ;

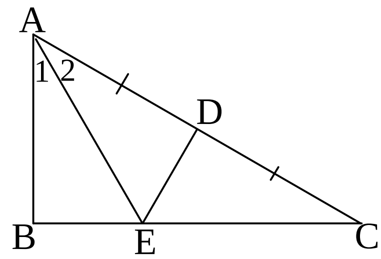
b) Tính các góc A và C của tam giác ABC.

Giải : (hình 5)

a) Gọi D là trung điểm của AC. Nối ED.

Vì AC = 2AB (gt) và AC = 2AD (vì D là trung điểm của AC) nên AB = AD = CD.

ΔABC vuông tại B nên $\widehat{B} = 90^0$.



Hình 5

Xét ΔAEB và ΔAED có :

AE chung

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (vì AE là phân giác của góc BAC)

AB = AD (chứng minh trên)

Do đó : ΔAEB = ΔAED (c – g – c) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{B} = 90^0$

Vì $\widehat{ADE}$ và $\widehat{CDE}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{ADE} = \widehat{CDE} = 90^0$.

Xét ΔEDA và ΔEDC có :

DE chung

$\widehat{ADE} = \widehat{CDE}$ (chứng minh trên)

AD = DC (vì D là trung điểm của AC)

Do đó : ΔEDA = ΔEDC (c – g – c) $\Rightarrow$ EA = EC.

b) Vì ΔEDA = ΔEDC (chứng minh trên) nên $\widehat{A}_2 = \widehat{C}$. Suy ra $\widehat{BAC} = 2\widehat{C}$

ΔABC có : $\widehat{B} + \widehat{BAC} + \widehat{C} = 180^0$ hay : $90^0 + 2\widehat{C} + \widehat{C} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{C} = 30^0$; $\widehat{BAC} = 2\widehat{C} = 60^0$

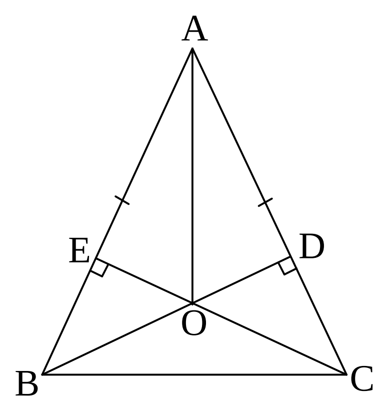
Vậy $\widehat{A} = 60^0$; $\widehat{C} = 30^0$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^0$ và AB = 2AC. Kẻ BD và CE tương ứng vuông góc với AC và AB (D $\in$ AC, E $\in$ AB). Gọi O là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng:

a) BD = CE ;

b) OE = OD và OB = OC ;

c) AO là tia phân giác của góc BAC.



Hình 6

Giải :

a) Xét ΔADB và ΔAEC có :

AB = AC (gt) ; $\widehat{A}$ chung ; $\widehat{E} = \widehat{D} = 90^0$

Do đó : ΔADB = ΔAEC (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra : BD = CE.

b) Vì ΔADB = ΔAEC (cmt) nên AD = AE.

Xét ΔADO và ΔAEO có :

AD = AE (gt) ; AO chung ; $\widehat{E} = \widehat{D} = 90^0$.

Do đó : ΔADB = ΔAEC (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Suy ra : OD = OE và $\widehat{OAD} = \widehat{OAE}$.

Lại có : BD = CE hay OB + OD = OC + OE $\Rightarrow$ OB = OC (vì OD = OE).
Vậy OD = OE và OB = OC.

c) Theo câu b), $\widehat{OAD} = \widehat{OAE} \Rightarrow$ AO là tia phân giác của góc BAC.

BÀI TẬP

Trường hợp cạnh – cạnh - cạnh

1. Cho ΔABC = ΔA'B'C'. Gọi M và M' tương ứng là trung điểm của BC và B'C'. Bết AM = A'M'. Chứng minh rằng :

a) ΔAMB = ΔA'M'B' ; b) $\widehat{AMC} = \widehat{A'M'C'}$.

2. Cho ΔABC. Vẽ cung tròn tâm C bán kính bằng AB, cung tròn tâm B bán kính bằng AC. Hai cung tròn trên cắt nhau tại D (A và D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BC). Chứng minh CD // AB và BD // AC.

3. Cho góc nhọn xOy. Trên tia Ox, Oy lấy tương ứng hai điểm A và B sao cho OA = OB. Vẽ đường tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm M, N nằm trong góc xOy. Chứng minh rằng :

a) ΔOMA = ΔOMB và ΔONA = ΔONB ; b) Ba điểm O, M, N thẳng hàng ;
c) ΔAMN = ΔBMN ; d) MN là tia phân giác của góc AMB.

4. Cho ΔABC có AB = AC. Gọi H là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh AH vuông góc với BC và là tia phân giác của góc BAC ;
b) Trên tia đối của HA lấy điểm K sao cho HK = HA. Chứng minh rằng CK // AB.

5. Cho ΔABC có AB = AC. Gọi D và E là hai điểm trên BC sao cho BD = DE = EC.

a) Chứng minh $\widehat{EAB} = \widehat{DAC}$;
b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh AM là tia phân giác của góc DAE ;
c) Giả sử $\widehat{DAE} = 60^0$. Có nhận xét gì về các góc của ΔAED.

6. Cho ΔABC. Vẽ đoạn AD vuông góc với AB (C và D nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC), AE = AC. Biết rằng DE = BC. Tính $\widehat{BAC}$.

7. Cho đoạn thẳng AB. Hai điểm C và D nằm khác phía đối với AB sao cho C và D cùng cách đều hai điểm A và B.

a) Chứng minh rằng CD là tia phân giác của góc ACB ;
b) Kết quả của câu a có đúng không nếu C và D nằm cùng phía đối với AB ?

Trường hợp cạnh – góc - cạnh

8. Cho góc xOy nhọn và tia Oz là tia phân giác của góc đó. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B sao cho OA = OB. Gọi C là một điểm trên tia Oz. Chứng minh rằng :

a) AC = BC và $\widehat{xAC} = \widehat{yBC}$; b) AB vuông góc với Oz.

9. Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Trên tia đối của tia MB lấy điểm N sao cho MB = MN. Chứng minh rằng :

a) CN ⊥ AC và CN = AB ; b) AN = BC và AN // BC.

10. Cho ΔABC vuông tại A và AB < AC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho AD = AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho AE = AC.

a) Chứng minh DE = BC; b) Chứng minh DE ⊥ BC;

c) Biết $4\hat{B} = 5\hat{C}$. Tính $\widehat{AED}$.

11. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của đoạn thẳng đó. Trên nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB, kẻ hai tia Ax, By sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{ABy}$; rồi lấy trên tia Ax hai điểm C và E (E nằm giữa A và C), trên By lấy hai điểm D và F (F nằm giữa B và D) sao cho AC = BD, AE = BF. Chứng minh rằng :

a) OC = OD, OE = OF ; b) Ba điểm C, O, D thẳng hàng; c) ED = CF.

12. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa hai điểm A và B nhưng không trùng với trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy hai điểm M, M’, trên tia By lấy hai điểm N, N’ sao cho AM = BN’ = BC, BN = AM’ = AC. Chứng minh rằng :

a) MC = NC, AN = BM’, AN’ = BM ; b) AN // BM’ và AN’ // BM ;

b) MN’ và M’N cắt nhau tại trung điểm của đoạn thẳng AB.

13. Cho ΔABC có góc A nhọn. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C, vẽ tia Ax và trên tia đó lấy điểm D sao cho AD = AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ tia Ay và trên đó lấy điểm E sao cho AE = AC.

a) Chứng minh BE = CD và BE ⊥ CD ;

b) Các đường thẳng AC và ED có thể vuông góc với nhau được không ?

c) Các kết quả trên có đúng không nếu góc A tù ?

14. Cho ΔABC có M là trung điểm của BC. Kẻ AH ⊥ BC (H ∈ BC). Biết rằng AH, AM chia góc đỉnh A thành ba góc bằng nhau. Tính các góc của ΔABC.

15. Cho ΔABC vuông tại A. Tia phân giác của góc B cắt cạnh AC tại điểm D. Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho BH = BA.

a) Chứng minh DH ⊥ BC ; b) Biết $\widehat{ADH} = 110^0$, tính $\widehat{ADH}$.

16. Cho ΔABC, D là trung điểm của AC, E là trung điểm của AB. Trên tia đối của tia DB lấy điểm N sao cho DN = DB. Trên tia đối của tia EC lấy điểm M sao cho EM = EC. Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

17. Cho điểm A nằm trong góc nhọn xOy. Vẽ tia AH vuông góc với Ox rồi lấy điểm B trên tia đối của tia HA sao cho HB = HA. Vẽ AK vuông góc với Oy rồi lấy điểm C trên tia đối của tia KA sao cho KC = KA. Chứng minh rằng :

a) OB = OC ; b) Biết $\widehat{xOy} = \alpha$, tính góc BOC.

18. Cho ΔABC có AC > AB, tia phân giác góc A cắt BC tại D. Trên AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Chứng minh AD ⊥ BE.

19. Cho d là đường trung trực của đoạn thẳng AB, C là một điểm thuộc d. Gọi Cx là tia đối của tia CA, Cy là tia phân giác của góc BCx. Chứng minh rằng Cy ⊥ d

20. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tạo trung điểm O của mỗi đoạn thẳng. Lấy các điểm E, F theo thứ tự trên AD và BC sao cho AE = BF. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

21. Cho ΔABC. Kẻ BD vuông góc với AC ; kẻ CE vuông góc với AB. Trên tia đối của tia BD lấy điểm H sao cho BH = AC ; trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho CK = AB. Chứng minh rằng AH = AK.

22. Cho ΔABC, M là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm C, vẽ tia Ax vuông góc với AB rồi lấy điểm D trên tia đó sao cho AD = AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ tia Ay vuông góc với AC rồi lấy điểm E trên tia đó sao cho AE = AC. Chứng minh rằng :

a) $AM = \frac{DE}{2}$; b) AM ⊥ DE.

Trường hợp góc – cạnh - góc

23. Cho ΔABC có $\hat{B} = \hat{C}$. Gọi I là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia DI lấy điểm E sao cho I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng :
a) BD = CE ; b) CB là tia phân giác của góc ACE.

24. Cho ΔABC vuông tại A có AB = AC. Qua A kẻ đường thẳng xy (B, C nằm cùng phía đối với xy). Kẻ BD và CE cùng vuông góc với xy (D, E ∈ xy).
a) Chứng minh rằng DE = BD + CE ;
b) Kết quả câu a) thay đổi thế nào nếu B, C nằm khác phía đối với xy ?

25. Cho ΔABC vuông tại A có AB = AC. Trên các cạnh AB, AC lấy tương ứng hai điểm D và E sao cho AD = AE. Từ A và D kẻ các đường vuông góc với BE cắt BC theo thứ tự tại M và N. Tia ND cắt tia CA ở I. Chứng minh rằng :
a) A là trung điểm của CI ; b) CM = MN.

26. Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Trên tia AM lấy điểm N sao cho M là trung điểm của AN. Chứng minh rằng :
a) CN = AB và CN // AB ; b) BC = 2AM.

27. Cho ΔABC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ AF ⊥ AB và AF = AB; trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ AH ⊥ AC và AH = AC. Gọi D là trung điểm của cạnh BC, I là một điểm trên tia đối của tia DA sao cho DI = DA. Chứng minh rằng :
a) AI = FH ; b) DA ⊥ FH.

28. Cho ΔABC, D là trung điểm của cạnh AB, E là trung điểm cạnh AC. Vẽ điểm F sao cho E là trung điểm của DF. Chứng minh rằng :

a) BD = CF ; b) DE // BC và $DE = \frac{1}{2}BC$.

29. Cho ΔABC. Gọi M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM. Tia CI cắt cạnh AB ở D. Chứng minh rằng :

a) BD = 2AD ; b) CD = 4ID.

30. Cho ΔABC có AB = AC. Gọi M là trung điểm của AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho BA = BD. Chứng minh rằng CD = 2CM.

31. Cho ΔABC. Kẻ BD và CE tương ứng vuông góc với AC và AB (D ∈ AC, E ∈ AB). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, DE. Chứng minh rằng MN ⊥ DE.

32. Cho ΔABC có góc A nhọn. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C vẽ AD ⊥ AB và AD = AB ; trên nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm B vẽ AE ⊥ AC và AE = AC. Kẻ AH ⊥ ED (H ∈ ED). Chứng minh rằng đường thẳng AH đi qua trung điểm M của cạnh BC.

33. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^0$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D, tia phân giác của góc C cắt AB ở E. Các tia phân giác đó cắt nhau ở I. Chứng minh rằng BE + CD = BC.

34. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^0$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D, tia phân giác của góc C cắt AB ở E. Các tia phân giác đó cắt nhau ở I. Chứng minh rằng ID = IE.

35. Cho đoạn thẳng AB, O là trung điểm của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Gọi C là một điểm thuộc tia Ax. Đường vuông góc với OC tại O cắt tia By ở D. Chứng minh rằng CD = AC + BD.

36. Trên cạnh BC của ΔABC lấy các điểm E và F sao cho BE = CF. Qua E và F, vẽ các đường thẳng song song với BA, chúng cắt cạnh AC theo thứ tự ở G và H. Chứng minh rằng AB = EG + FH.

37. Cho ΔABC vuông tại A, AB = AC. Qua A vẽ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với đối với đường thẳng d. Kẻ BH và CK vuông góc với d. Chứng minh rằng :

a) AH = CK ; b) HK = BH + CK.

38. Cho ΔABC. Vẽ đoạn thẳng AD bằng và vuông góc với AB (D và C nằm kahsc phái đối với AB). Vẽ đoạn thẳng AE bằng và vuông góc với BC. Đường thẳng HA cắt DE ở K. Chứng minh rằng DK = KE.

Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông

39. Cho ΔABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD = CE. Kẻ Bh ⊥ AD (H ∈ AD), kẻ CK ⊥ AE (K ∈ AE). CMR :

a) BH = CK ; b) ΔAHB = ΔAKC ; c) BC // HK.

40. Cho ΔABC cân tại A, góc A nhọn. Kẻ BD ⊥ AC (D ∈ AC), kẻ CE ⊥ AB (E ∈ AB). Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng :

a) AD = CE ; b) AI là phân giác của góc BAC.

41. Cho ΔABC vuông tại A. Từ A kẻ AH ⊥ BC. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = BA. Kẻ EK ⊥ AC (K ∈ AC). Chứng minh rằng AK = AH.

42. Cho ΔABC vuông cân ở A, M là trung điểm của BC, điểm E nằm giữa M và C. Kẻ BH, CK vuông góc với AE (H và K thuộc đường thẳng AE). Chứng minh rằng :

a) BH = AK ; b) ΔMBH = ΔMAK ; c) ΔMHK vuông cân.

43. Cho ΔABC vuông tại A (AB > AC). Tia phân giác của góc B cắt AC ở D. Kẻ DH ⊥ BC. Trên tia AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Đường thẳng vuông góc với AE cắt tia DH ở K. Chứng minh rằng :

a) BA = BH ; b) $\widehat{DBK} = 45^0$.

44. Cho ΔABC vuôn cân tại A. Một đường thẳng d bất kì luôn đi qua A. Kẻ BH và CK cùng vuông góc với d. Chứng minh rằng tổng $BH^2 + CK^2$ có giá trị không đổi.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

45. Cho ΔABC cân tại A. Trên tia đối của các tia BC và CB lấy thứ tự hai điểm D và E sao cho BD = CE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng :

a) ΔADE cân ; b) AM là tia phân giác của góc DAE ;

c) BH = CK, với H và K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ B, C đến AD và AE.

d) Ba đường thẳng AM, BH và CK gặp nhau tại một điểm.

46. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tam giác đều ACD và BEC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và BD. Chứng minh rằng :

a) AE = BD ; b) ΔMCN là tam giác đều.

47. Cho ΔABC cân tại A, phân giác CD. Qua D kẻ tia DF vuông góc với DC và tia DE song song với BC (F ∈ BC, E ∈ AC). Gọi M là giao điểm của DE với tia phân giác góc BAC. Chứng minh rằng :

a) CF = 2BD ; b) CF = 4DM.

48. Cho ΔABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD = CE. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng :

a) DM = EN ;

b) Đường thẳng BC cắt MN tại trung điểm I của MN ;

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

49. Cho ΔABC nhọn. Về phía ngoài của tam giác vẽ các tam giác ABD và ACE đều vuông cân tại A. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BD và CE, P là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ΔPMN vuông cân.

50. ΔABC cân tại B, có $\widehat{B} = 80^0$. I là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{IAC} = 10^0$ và $\widehat{ICA} = 30^0$. Tính $\widehat{AIB}$.

51. Cho ΔABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^0$. Từ B và C kẻ các đường thẳng cắt các cạnh đối diện ở D và E. Biết $\widehat{CBD} = 60^0$, $\widehat{BCE} = 50^0$. Tính $\widehat{BDE}$.

52. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120^0$, phân giác AD. Kẻ DE và DF tương ứng vuông góc với AB và AC. Trên các đoạn thẳng BE và FC đặt EK = FI.

a) Chứng minh ΔDEF đều ;

b) Chứng minh ΔDIK cân ;

c) Từ C kẻ đường thẳng song song với AD, cắt BA ở M. Chứng minh ΔAMC đều ;

d) Tính độ dài AD biết CM = m và CF = n.

53. Cho góc vuông xOy. Vẽ cung tròn tâm O, bán kính tuỳ ý cắt Ox ở A, cắt Oy ở B. Từ một điểm C tuỳ ý trên cung AB (C khác A và B) kẻ đường thẳng song song với Ox ở A’ và cắt Oy ở B’. Chứng minh rằng tổng $CA'^2 + CB'^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm C trên cung AB.